

Locale $P(X)$ 的两种理想^{*}

肖建明

(南开大学数学系, 天津 300071)

摘 要: 引进作为特殊 locale 的离散拓扑 $P(X)$ 的 2 种理想: 主理想与 WB 理想, 并研究了其对交运算的封闭性, 对并运算的某些性质, 同时在一定的条件下得出 2 种理想的一致性.

关键词: locale; 主理想; WB 理想

中图分类号: O189.11; O153.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 06-0102-03

locale 是一个完备的 Heyting 代数, 即一个完备格 L , 满足分配律: $\alpha \wedge S = \bigvee \{ \alpha \wedge b \mid b \in S \}$, $\forall \alpha \in L, S \subseteq L^{[1,2]}$. 而对离散拓扑空间 $(X, P(X))$ 来说, $P(X)$ 以集合之间的包含关系“ $\subseteq$ ”为序, 并定义并运算、交运算“ $\bigvee$ 、 $\bigwedge$ ”分别为集合之间的并集与交集 $A \bigvee B = A \cup B, A \bigwedge B = A \cap B$, 则离散拓扑 $P(X)$ 就是幂集格, 而且也是开集格^[3,4], 进而是一个 locale, 作为 locale 就可探讨其理想.

1 Locale $P(X)$ 的主理想

定义 1 设 $(X, P(X))$ 为离散拓扑空间, $A \in P(X)$, 称集族 $\downarrow(A) = \{ B \in P(X) \mid B \subseteq A \}$ 为离散拓扑的由 A 生成的主理想. 并记 $\uparrow(A) = \{ B \in P(X) \mid B \supseteq A \}$.

引理 1 设 $(X, P(X))$ 为离散拓扑空间, 则

- (1) $\downarrow(\Phi) = \{ \Phi \}$
- (2) $\downarrow(X) = P(X)$

引理 2 设 $(X, P(X))$ 为离散拓扑空间, T 为一个指标集, $\alpha \in T, A_\alpha \in P(X)$. 则有

$$\bigcap_{\alpha \in T} \downarrow(A_\alpha) = \downarrow(\bigcap_{\alpha \in T} A_\alpha)$$

定理 1 设 $(X, P(X))$ 为离散拓扑空间, 则 $P(X)$ 的所有主理想的集 $\{ \downarrow(A) \mid A \in P(X) \}$ 是一个完备交半格.

证明 在 $\mathcal{D} = \{ \downarrow(A) \mid A \in P(X) \}$ 中以包含关系为序. 则 $\mathcal{D}$ 为偏序集. 对 $A_1, A_2 \in P(X)$, 定义

$$\downarrow(A_1) \wedge \downarrow(A_2) = \downarrow(A_1 \cap A_2)$$

并定义 $1 = \downarrow(X) = P(X)$, 由文[1] 定理 1.3 知: $(\mathcal{D}, \wedge, 1)$ 为交半格. 并且对任意 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$

令 $\mathcal{B} = \{ \downarrow(A_\alpha) \mid \alpha \in T, T \text{ 为某个指标集} \}$, 由引理 2 知: $\bigwedge \mathcal{B} = \bigcap \mathcal{B} = \downarrow(\bigcap \{ A_\alpha \mid \alpha \in T \})$, 即对 $\mathcal{D}$ 的任一个子集 $\mathcal{B}$ 都有下确界. 故 $\mathcal{D}$ 为完备的交半格.

定理 2 设 $(X, P(X))$ 为离散拓扑空间, $\mathcal{A} = \{ \downarrow(A_\alpha) \mid \alpha \in T \}$ 为 $P(X)$ 的一族理想. 则有

$$\bigcup_{\alpha \in T} \downarrow(A_\alpha) \subseteq \downarrow(\bigcup_{\alpha \in T} A_\alpha) \quad \text{证明}$$

对任意 $B \in \bigcup_{\alpha \in T} \downarrow(A_\alpha)$, 由定义 1 知: $B \subseteq A_\alpha$, 而 $A_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in T} A_\alpha$. 所以

$$B \subseteq \bigcap_{\alpha \in T} A_\alpha, B \in \downarrow(\bigcup_{\alpha \in T} A_\alpha)$$

则 $\downarrow(A_\alpha) \subseteq \downarrow(\bigcup_{\alpha \in T} A_\alpha)$

因而有 $\bigcup_{\alpha \in T} \downarrow(A_\alpha) \subseteq \downarrow(\bigcup_{\alpha \in T} A_\alpha)$

2 离散拓扑的 WB 理想

定义 2 设 $(X, P(X))$ 为离散拓扑空间, $A \in P(X)$. 称 $\Downarrow(A) = \{ B \in P(X) \mid B \ll A \}$ 为 $P(X)$ 的 WB 理想.

引理 3 设 $(X, P(X))$ 为离散拓扑空间, $x \in X$. 则有下面结论

- (1) $\Downarrow(\Phi) = \{ \Phi \}$
- (2) $\Downarrow\{x\} = \{ \Phi, \{x\} \}$
- (3) 若 X 是有限集, 则 $\Downarrow(X) = P(X)$.

证明 $\Downarrow(A) = \{ B \in P(X) \mid B \ll A \}$, 由 $B \ll A$ 的等价条件 (见文[1] p287): $B \ll A \Leftrightarrow$ 对 $P(X)$ 的任意有向子集 S 并且有 $\bigvee S \geq A$, 则存在 $s \in S, s \geq B \dots^*$.

(1) 证明 $\Downarrow(\Phi) = \{ \Phi \}$.

即要证 * 式中的 B 是 Φ . 其中 * 式中的 $A = \Phi, \forall \{x\} \in \{ \{x\} \}, \{x\}$ 有向且 $\bigvee \{ \{x\} \} \geq \Phi, \exists \{x\} \in \{ \{x\} \} \in \{x\} \geq \Phi$. 由 $\{x\}$ 的任意性, B

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10171049)

收稿日期: 2001-01-10; 作者简介: 肖建明 (1974-), 男, 博士生.

可取 Φ . 所以 $\Phi \in \Downarrow(\Phi)$.

若 B 取非空集 C , 则存在 $c \in C$, 任取 $d \in X$, 且 $d \neq c$. 又 $\{\{d\}\}$ 有向, 并且有 $\bigvee \{\{x\}\} \geq \Phi$, $\{\{d\}\}$ 的元只能是 $\{d\}$, 但 $\{d\} \not\geq \{c\}$ (否则 $c = d$), 所以更不能有 $\{d\} \geq C$. 因此满足条件 $B \ll \Phi$ 的 B 不能取非空的集. 即

$$\Downarrow \Phi = \{\Phi\}$$

(2) 证明 $\Downarrow\{x\} = \{\Phi\{x\}\}$.

在 * 式中取 $A = \{x\}$. 首先证明 $\Phi \in \Downarrow\{x\}$. 因为对 $P(X)$ 的任一有向集 S 且 $\bigvee S \geq \{x\}$, 任意取定 $s \in S$, 有 $s \geq \Phi$, 由 * 式的等价条件知: $\Phi \ll x$, 故 $\Phi \in \Downarrow\{x\}$.

其次证明 $\{x\} \in \Downarrow\{x\}$. 对于 $P(X)$ 的任意有向子集 S 并且有 $\bigvee S \geq \{x\}$. 则 $x \in \bigvee S$, $\exists s \in S$ 使得 $x \in s$, 即 $s \supseteq \{x\}$. 由 * 式知: $\{x\} \ll x$. 故 $\{x\} \in \Downarrow\{x\}$.

最后证明: 对任意 $D \in P(X)$ 并且 $D \neq \{x\}$, 且 $D \neq \Phi$, 均不能有 $D \ll x$ 成立. 存在有向集 $S = \{\{x\}\}$, $\bigvee S \geq \{x\}$. 但是对于任意 $s \in S$, s 只能是 $\{x\}$, 由于 $D \neq \{x\}$ 且 $D \neq \Phi$ 则 $\exists y \in D$ 且 $y \neq x$, 因此 $D \not\geq \{x\}$, 否则 $D = \Phi$ 或 $D = \{x\}$. 由 * 式知: $D \not\ll x$ 不成立. 从而 $\Downarrow\{x\} = \{\Phi\{x\}\}$.

(3) 证明 $\Downarrow(X) = P(X)$

由于 $\Downarrow(X) \subseteq P(X)$, 只要证明 $\Downarrow(X) \supseteq P(X)$ 即可. 对任意有向集 $S \subseteq P(X)$, 且 $\bigvee S \geq X$. $\forall x \in X$, $\exists S_x \in S$ 使 $x \in S_x$; 由于 S 为有向集, 则 $\bigcup_{x \in X} S_x \in S$, 由于 $\bigcup_{x \in X} S_x \subseteq X$; 且 $\forall x \in X$, $x \in S_x \subseteq \bigcup_{x \in X} S_x$, 即 $X \subseteq \bigcup_{x \in X} S_x$, 于是 $\bigcup_{x \in X} S_x = X$. 故有向集 S 中存在 $s = \bigcup_{x \in X} S_x = X$ 使得 $X \geq X$ 即有 $X \ll X$, $X \in \Downarrow(X)$. 同理可证明 $\forall A \subseteq X$, $X \geq A$, 则 $A \ll X$ 即 $A \in \Downarrow(X)$. 由 A 的任意性知: $P(X) \subseteq \Downarrow(X)$. 故 $\Downarrow(X) = P(X)$.

定理 3 设 $(X, P(X))$ 为离散拓扑空间, 且 A 是 $P(X)$ 的有限元. 则 WB 理想 $\Downarrow(A) = \downarrow(A)$.

证明 对 $P(X)$ 的任意有向子集 S 且 $\bigvee S \geq A$. $\forall \alpha \in A$, 存在 $S_\alpha \in S$, 使得 $\alpha \in S_\alpha$, 由于 S 是有向集, A 为 $P(X)$ 的有限元知: $\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha \in S$, 并且 $\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha \subseteq A$, 在 * 式中令 $s = \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$, 则有 $s \geq A$. 由 * 式知: $A \ll A$. 即 $A \in \downarrow(A)$. 同理可证若 $B \subset A$, 有 $s = \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha \geq B$, 做 $B \ll A$, $B \in \downarrow(A)$. 因此 $\forall C \in \downarrow(A)$, 由定义 1 知: $C = A$

或 $C = B \subset A$, 由上述证明知 2 种情况均有 $C \in \downarrow(A)$, 即 $\downarrow(A) \subseteq \Downarrow(A)$.

下面只要证明“ $D \not\subseteq A$, 则 $D \not\ll A$ 不成立”即可. 令 $S = \{\{\alpha\} \mid \alpha \in A\} \cup \{A\}$. $\forall B, C \in S$, 则存在 $B \cup C \subseteq A$, 且 $A \in S$, 故 S 是有向集, 由于 $S \subseteq P(X)$, 由 S 的构造知: $\bigvee S \geq A$; 但 $\forall s \in S$, 由于 $D \not\subseteq A$, 则存在 $d \in D \setminus A$, 于是 $d \notin \alpha$, 则 $d \notin s$, 因此 $S \not\geq D$. 故 $D \not\ll A$ 不成立.

综上所述, $\Downarrow(A) = \downarrow(A)$.

推论 设 $(X, P(X))$ 为离散拓扑空间, 且 X 是有限集, T 为指标集, 对集族 $\{A_\alpha \in P(X) \mid \alpha \in T\}$. 则有

$$(1) \bigcap_{\alpha \in T} \Downarrow(A_\alpha) = \Downarrow(\bigcap_{\alpha \in T} A_\alpha);$$

$$(2) \bigcap_{\alpha \in T} \Downarrow(A_\alpha) \subseteq \Downarrow(\bigcap_{\alpha \in T} A_\alpha);$$

证明 (1) 由定理 3 的证明知: $\Downarrow(A_\alpha) = \downarrow(A_\alpha)$. 而由引理 2 知: $\bigcap_{\alpha \in T} \downarrow(A_\alpha) = \downarrow(\bigcap_{\alpha \in T} A_\alpha)$, 故有 $\bigcap_{\alpha \in T} \Downarrow(A_\alpha) = \Downarrow(\bigcap_{\alpha \in T} A_\alpha)$.

(2) 与 (1) 同理可证 $\bigcup_{\alpha \in T} \Downarrow(A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in T} \downarrow(A_\alpha)$ 与 $\Downarrow(\bigcup_{\alpha \in T} A_\alpha) = \downarrow(\bigcup_{\alpha \in T} A_\alpha)$, 由定理 2 知: $\bigcup_{\alpha \in T} \Downarrow(A_\alpha) \subseteq \Downarrow(\bigcap_{\alpha \in T} A_\alpha)$.

定理 4 设 $(X, P(X))$ 为离散拓扑空间, 且 X 为有限集. 则 $\{\downarrow(A) \mid A \in P(X)\}$ 为一个完备交半格, 其中 $1 = \downarrow(X) = P(X)$.

证明 由推论之(1)知: $\downarrow(A_1) \wedge \downarrow(A_2) = \downarrow(A_1 \cap A_2)$, 因此在 $\mathcal{D} = \{\downarrow(A) \mid A \in P(X)\}$ 中以包含关系为序, 并定义交运算 $\downarrow(A_1) \wedge \downarrow(A_2) = \downarrow(A_1 \cap A_2)$, 定义 $1 = \downarrow(X) = P(X)$, 则 $(\mathcal{D}, \wedge, 1)$ 为一个交半格. 且由推论之(1)知: $\bigcap_{\alpha \in T} \downarrow(A_\alpha) = \downarrow(\bigcap_{\alpha \in T} A_\alpha)$, 即 $(\mathcal{D}, \wedge, 1)$ 为完备的交半格.

参考文献:

- [1] JOHNSTONE P T. Stone spaces[M]. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1982. 286—290.
- [2] 梁基华. Locale $P(X)$ 的两种理想[J]. 数学学报. 1998, 41(2): 415—416.
- [3] GIERZ G, HOFMANN K H, KEIMEL K. A compendium of continous lattices[M]. Berlin: Spring Verlag, 1980. 43—56.
- [5] 胡长流, 宋振明. 格论基础[M]. 郑州: 河南大学出版社, 1990. 86—97.

(下转第 106 页)

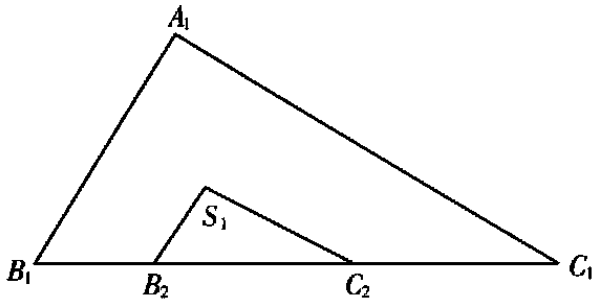


图 5 $\lambda > 3$ 情形
Fig. 5 Case of $\lambda > 3$

参考文献:

- [1] ECKHOFF J H. Radon and Carathéodory type theorems [C] //GRUBER P M, WILLS J M. Handbook of convex geometry[M] . Amsterdam: North Holland, 1993. 406—409.
- [2] KATCHALSKI M, NASHTIR D. A Helly type conjecture [J] . Discrete Comput Geom, 1999, 21: 37—43.

On a Conjecture of Grünbaum's

YUAN Li-ping

(Department of Mathematics, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050016, China)

Abstract: It is shown that a planar family of translates of a closed triangle is Π^3 , provided that any two of its members intersect.

Keywords: Π^n ; closed convex set; translation; halfspace

(上接第 103 页)

Two Kinds of Ideals of Locale $P(X)$

XIAO Jian-ming

(Mathematics Department, Nankai University, Tianjin 300071, China)

Abstract: From the perspective of lattice theory, two kinds of ideals of discrete topology as a locale, which are principal ideal and WB-ideal, and some of their properties are presented.

Keywords: locale; principal ideal; WB-ideal